7.9 : $V = \mathbb{R}_2[x]$ $\langle p,q \rangle = p(0)q(0) - p(1)q(1)$

1) Trova $V^\perp$

2) Trova $p(x)$ isotropo non in $V^\perp$

3) I vettori isotropi formano spazio vett?

1) $p(x) = ax^2 + bx + c$ $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$

$$S = [g]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rk} S = 2$

$$\langle 1, 1 \rangle = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$
$$\langle 1, x \rangle = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$
$$\langle 1, x^2 \rangle = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$
$$\langle x, x \rangle = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$
$$\langle x, x^2 \rangle = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$
$$\langle x^2, x^2 \rangle = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} S = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\dim \operatorname{Ker} S = 1$

$V^\perp = \operatorname{Span}(x - x^2)$

Verifica: $p(x) = x - x^2$ $q(x) = ax^2 + bx + c$

$$\langle p(x), q(x) \rangle \overset{?}{=} 0 \qquad p(x) = x - x^2 = x(1-x)$$

$$\underbrace{p(0)}_{=0}\, q(0) - \underbrace{p(1)}_{=0}\, q(1) = 0 \qquad \text{OK}$$

Vettori isotropi:

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} \boxed{0} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$(y+z)(2x + y + z) = 0$$

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} -y-z \\ -x-y-z \\ -x-y-z \end{pmatrix} = 0$$

$$x(-y-z) + y(-x-y-z) + z(-x-y-z) = 0$$

$$x(y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z) = 0$$

$$2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2 = 0$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione $\Rightarrow$ è isotropo

non è

$z = 0 \quad y = 1 \quad 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

nel radicale

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} S = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

non è nel radicale

è nel radicale

$$p(x) = 1 \qquad p(x) = -\frac{1}{2} + x$$

3) Spesso i vettori isotropi non formano un insieme chiuso rispetto a $+$

a) 0 c'è ✓

b) chiuso per $+$ spesso no

c) " " moltiplicaz. per λ ✓

$$g(v,v) = 0 \Rightarrow g(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 g(v,v) = 0$$

$$g(v,v) = 0 \qquad g(w,w) = 0$$

$$\underset{?}{g(v+w, v+w)} = \underset{0}{g(v,v)} + \underset{0}{g(w,w)} + 2g(v,w)$$

Cerco v, w isotropi non ortogonali

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ortogonali?

$$\underset{\text{SI}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + \underset{\text{SI}}{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}} = \underset{\text{NO}}{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}}$$ isotropo? NO

$\underset{\text{NO}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$ non è isotropo

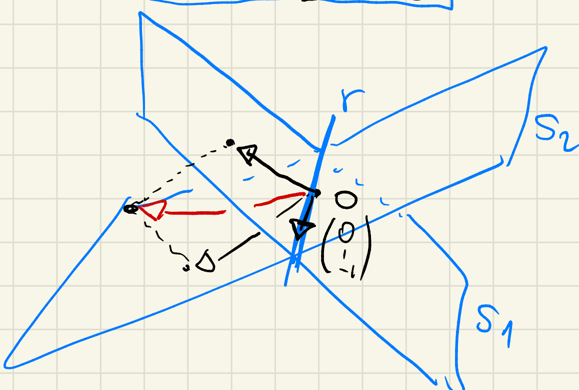
$$S = \{(y+z)(2x+y+z) = 0\}$$

$\boxed{S = S_1 \cup S_2}$

$S_1 = \{y+z=0\} \leftarrow$ piano ortog. a $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$S_2 = \{2x+y+z=0\} \leftarrow$ piano

piano ortogonale a $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$



$$r = \begin{cases} y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

$\boxed{S \supseteq V^\perp}$

$$V^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = r$$

7.10

$$S = \begin{pmatrix}\boxed{0}&0&1\\0&1&0\\1&0&\boxed{0}\end{pmatrix}$$

g_S su $\mathbb{R}^3$

1) è degenere?
2) $\exists\, W \subseteq \mathbb{R}^3$ $\dim W = 1$ t.c. $W \subseteq W^\perp$?
3) Determina vettori isotropi. Formano sottospazio?

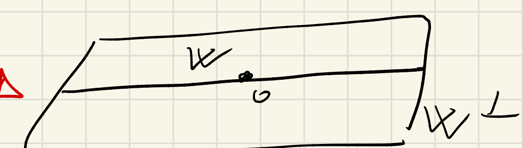
1) NO perché $\det S \neq 0$ $\qquad (\mathbb{R}^3)^\perp = \{0\}$

2) non-deg. $\Rightarrow$ $\dim W + \dim W^\perp = 3$

$\not\Leftarrow$ $\quad \dim W \oplus \dim W^\perp = 3 \iff g|_W$ non-degenere

Configurazioni possibili di una retta W e di un piano $W^\perp$ in $\mathbb{R}^3$

?



Se $W \cap W^\perp = \{0\}$, sono in somma diretta $\qquad W \subseteq W^\perp$

Cerco W retta con $g|_W$ degenere

$\boxed{W = \mathrm{Span}(v)}$ $\quad g|_W$ deg. $\Longleftrightarrow$ $\boxed{v \text{ isotropo}}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ isotropo $\Rightarrow$ $W = \mathrm{Span}(e_1)$ funziona, cioè $W \subseteq W^\perp$

verificato

3 $\quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vettori isotropi:

$$\underbrace{(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(z\ y\ x)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$(z\ y\ x) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\{2xz + y^2 = 0\} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ non fa zero}$$

e_1 e e_3 sono isotropi $\Rightarrow$ $e_1 + e_3$ non è isotropo

però non sono ortogonali

4) Determina $W \subseteq \mathbb{R}^3$ piano t.c. $g|_W$ è def +

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \text{Span}(\underline{v_1}, \underline{v_2})$ t.c. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$

$$S' = [g|_W]_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & g(v_1,v_2) \\ g(v_2,v_1) & g(v_2,v_2) \end{pmatrix}} \text{ def}+$$

$\underline{\text{Es}}$: $\begin{pmatrix} a & \boxed{0} \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $a, b > 0$

Cerco v_1, v_2 t.c.:

1) $\underset{a}{\underset{\shortparallel}{g(v_1,v_1)}} > 0$ $\quad \underset{b}{\underset{\shortparallel}{g(v_2,v_2)}} > 0$

2) $g(v_1, v_2) = 0$

$v_1 = e_2$ $\quad \underline{g(e_2, e_2) = 1}$ $\quad U = \text{Span}(e_2)$ $\boxed{\text{Determino } U^\perp}$

$U = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; (0\,1\,0)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \right\}$

$$= \left\{ (0\,1\,0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ y = 0 \}$$

$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} \right\}$ Ne voglio uno positivo:

$$(x\;0\;z)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} > 0$$

$$(z\;0\;x)\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} > 0 \qquad 2xz > 0$$

$\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}$ $\quad xz > 0$

<u>Es</u>: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ funziona

$v_2 = e_1 + e_3$ verifica che funzioni:

5 Determina $W \subseteq \mathbb{R}^3$ piano t.c. $g|_W$ degenere.

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \mathrm{Span}(e_1, e_2) \quad \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$

$$[g|_W]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} g(e_1,e_1) & g(e_1,e_2) \\ g(e_2,e_1) & g(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è degenere perché $\det = 0$

4 $$S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 & 1 \end{matrix} & -7 \end{pmatrix}$$

$W = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$

$g|_W$ è def +

7.11 - 2 V sp. vett. g

$\boxed{U \subseteq (U^\perp)^\perp}$ Se g non-deg. allora $U = (U^\perp)^\perp$

$$v \in U \overset{?}{\Longrightarrow} \boxed{v \in (U^\perp)^\perp}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall w \in U^\perp, \quad \langle v, w \rangle = 0}$$

Dimostrazione che non funziona:

$$\boxed{\dim (U^\perp)^\perp \geq \dim U}$$

$$\not\Downarrow$$

$$(U^\perp)^\perp \supseteq U$$

Se g non-deg $\quad \dim U^\perp = n - \dim U$

$$\dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp$$

$$k = \dim U \Rightarrow \dim U^\perp = n-k \Rightarrow \dim (U^\perp)^\perp = n - (n-k) = k$$

$$\underset{k}{U} \subseteq \underset{k}{(U^\perp)^\perp} \Rightarrow U = (U^\perp)^\perp$$

Segnatura

Def: V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare g. $\quad n = \dim V$

La SEGNATURA è una terna di numeri (i_+, i_-, i_0)

- L'INDICE DI POSITIVITÀ i_+ è la massima dimensione di un sottospazio $W \subseteq V$ su cui la restrizione di g è def $+$
- L'INDICE DI NEGATIVITÀ i_- " " " " " " " " " " " " " " è def $-$
- L'INDICE DI NULLITÀ è

$$i_0 = \dim V^\perp$$

Ricordiamo che per Sylvester $\exists$ sempre una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonale

Un prodotto scalare g è DEFINITO NEGATIVO se $g(v,v) < 0 \quad \forall v \neq 0$

$$S = [g]_{\mathcal{B}} = \text{diagonale} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$d_i \in \{0, 1, -1\}$

Se normalizzo e riordino la base in modo da mettere prima i vettori v_i con $g(v_i, v_i) = 1$, poi $g(v_i, v_i) = -1$, poi $g(v_i, v_i) = 0$

Ottengo la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{I_k} & & \\ & \boxed{-I_h} & \\ & & \boxed{0_{n-(h+k)}} \end{pmatrix}$$

k, h

Prop: La segnatura di g è proprio $(k, h, n-(h+k))$

dim:

$$i_+ = \max \{ \dim W \mid W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ def } + \}$$

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{I_k} & & \\ & \boxed{-I_h} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$ base ortonormale

<u>Tesi</u>: $\underline{i_+ = k}$ $\quad$ $\underline{i_- = h}$ $\quad$ $\boxed{i_0 = n - (k+h)}$

$W^+ = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ $\quad$ $g|_{W^+}$ è def +

perché $\left[g|_{W^+} \right]_{\{v_1, \dots, v_k\}} = I_k$

$\Rightarrow \exists\, W^+$ $\dim W^+ = k$ su cui g è def + $\Rightarrow \boxed{i_+ \geq k}$

Analogamente con $W^- = \mathrm{Span}\{v_{k+1}, \dots, v_{k+h}\}$

$g|_{W^-}$ è def $-$ perché $\left[g|_{W^-} \right]_{v_{k+1}, \dots, v_{k+1}} = -I_h$

$\boxed{i_- \geq h}$

$W^0 = \mathrm{Span}(v_{k+h+1}, \dots, v_n) = \mathrm{Ker}\, S = V^\perp$ radicale

$i_0 = \dim V^\perp = \dim W^0 = n-(k+h)$ $\boxed{i_0 = n-(k+h)}$

Resta da vedere $i_+ = k$ $\quad i_- = h$

Per assurdo supponiamo $i_+ > k$, cioè $\exists\, U \subseteq V$

t.c. $g|_U$ def $+$ e $\dim U = k+1$

$$\underbrace{U}_{k+1} \cap \underbrace{\left(\overbrace{\underbrace{W^-}_{h} \oplus \underbrace{W^0}_{n-(h+k)}}^{W} \right)}_{n-k} \ni v \neq 0 \quad \text{per Grassmann}$$

$\dim(U \cap W) \geq 1$

$\rightarrow v \in U$ def$+$ $\Rightarrow g(v,v) > 0$

$\rightarrow v \in W = W^- \oplus W^0 \Rightarrow g(v,v) \leq 0$

$\Rightarrow$ ASSURDO

$\mathrm{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$

$v \in W^- \oplus W^0 = \mathrm{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$

$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ cioè $v = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$

Esercizi
7.12-13
-14

$$g(v,v) = (\underbrace{0 - 0}_{k} \underbrace{\lambda_{k+1} -}_{h} \underbrace{- \lambda_n}_{n-(k+h)}) \begin{pmatrix} I_k & & \\ & -I_h & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ \lambda_{k+1} \\ | \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda_{k+1}^2 - \dots - \lambda_{k+h}^2 \leq 0$$

Quindi $i_+ = k$ Analogamente $i_- = h$